Un corrigé du TD nº 2 : Récursivité

EXERCICE 1 (*Nombre de chiffres d'un entier*)

OCAML
```
(* Spécification : n est un entier positif ou nul *)

let rec nombre_chiffres n =
  if n = 0 then
    0
  else
    nombre_chiffres (n / 10) + 1
;;
```

On montre par récurrence (forte) sur n dans $\mathbb{N}$ que la fonction termine et renvoie le bon résultat.

EXERCICE 2 (*Multiplication du paysan russe*)

OCAML
```
let rec mult_paysan a b =
  if a = 0 then
    0
  else if a < 0 then
    mult_paysan (-a) (-b)
  else if a mod 2 = 0 then
    mult_paysan (a / 2) (2 * b)
  else
    mult_paysan (a - 1) b + b
;;
```

Par récurrence (forte) sur $a \in \mathbb{N}$:

- `mult_paysan 0 b` termine et renvoie $0 = 0 \cdot b$.
- Si jusqu'à $a - 1$ pour un $a > 0$ et pour tout b, `mult_paysan a b` termine et renvoie ab, alors
  - Soit a est pair et `mult_paysan (a / 2) (2 * b)` termine et renvoie ab par hypothèse de récurrence
  - Soit a est impair et `mult_paysan (a - 1) b` termine et renvoie $ab - b$ par hypothèse de récurrence

  Dans tous les cas, `mult_paysan a b` termine et renvoie ab ce qui établit la récurrence.

EXERCICE 3

1. f teste si n est pair et g si n est impair. Si $n < 0$, les fonctions ne terminent pas.
2. `f n` renvoie $2n + 1$ et `g n` renvoie $2n$. Si $n < 0$, les fonctions ne terminent pas.
3. `f m n` et `g m n` renvoient $n + m$. Si $m < 0$, les fonctions ne terminent pas. En revanche n peut être un entier relatif ici.

OCAML
```
let rec f m n =
  if m = 0 then
    n
  else
    g (m - 1) (n + 1)
and g m n =
  if m = 0 then
    n
  else
    f (m - 1) n + 1
;;
```

EXERCICE 4 (*Fonction 91 de McCarthy*)

- $\boxed{\text{Si } n > 100,\ f_{91}(n) = n - 10.}$
- $\boxed{\text{Si } n = 100 - k \in [\![90, 100]\!]}$ avec $k \in [\![0, 10]\!]$, on montre par récurrence simple finie sur k que $\boxed{f_{91}(n) = 91.}$
  - C'est vrai pour $k = 0$ car

$$f_{91}(100) = f_{91}(f_{91}(111)) = f_{91}(101) = 91,$$

- Si c'est vrai pour un $k \in [\![0,9]\!]$, alors

$$f_{91}(100-(k+1)) = f_{91}(99-k) = f_{91}(f_{91}(110-k))$$

avec $110-k > 100$ donc

$$f_{91}(100-(k+1)) = f_{91}(100-k) = 91$$

par hypothèse de récurrence.

On peut aussi se passer de récurrence : si $n \in [\![91,100]\!]$,

$$f_{91}(n) = f_{91}(f_{91}(n+11)) = f(n+1)$$

car $n+11 > 100$. Ainsi, pour un tel n, $f_{91}(n) = f_{91}(101) = 91$.
(En fait la récurrence est implicite. Où est-elle ?)

- Puis, $\boxed{\text{si } n = 100-k \leqslant 100}$ avec $k \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k que $\boxed{f_{91}(n) = 91.}$
  - C'est vrai pour $k \in [\![0,10]\!]$ d'après le point précédent et **toutes ces initialisations sont nécessaires**.
  - Si pour un $k \geqslant 11$, c'est vrai pour $k-11$, alors

$$f_{91}(100-k) = f_{91}(f_{91}(111-k)) = f_{91}(f_{91}(100-(k-11))) = f_{91}(91) = 91$$

par par hypothèse de récurrence puis par le cas $k=9$.

Autre rédaction :

- $\boxed{\text{Si } n > 100 \text{ alors } f_{91}(n) = n-10}$
- Montrons $f_{91}(100-n) = 91$ pour $n \in [\![0,10]\!]$.
  - ⋄ $f_{91}(100-0) = f_{91}(100) = f_{91}(f_{91}(111)) = f_{91}(101) = 91$
  - ⋄ Supposons $f_{91}(100-n) = 91$ pour $n \in [\![0,9]\!]$ fixé.
    $f_{91}(100-(n+1)) = f_{91}(99-n) = f_{91}(f_{91}(110-n))$
    Comme $110-n > 100$: $f_{91}(100-(n+1)) = f_{91}(100-n) = 91$.

  Par récurrence finie : $\boxed{\forall n \in [\![0,10]\!] : f_{91}(100-n) = 91}$

- Montrons $f_{91}(100-n) = 91$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  On va procéder par récurrence forte en initialisant pour tout $n \in [\![0,10]\!]$.
  - ⋄ D'après le résultat précédent, on a :
    $\forall k \in [\![0,n]\!] : f_{91}(100-k) = 91$ pour tout $n \in [\![0,10]\!]$.
  - ⋄ Supposons $\forall k \in [\![0,n]\!] : f_{91}(100-k) = 91$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $\underline{n \geq 10}$ fixé.

$$f_{91}(100-(n+1)) = f_{91}(99-n) = f_{91}(f_{91}(110-n)) = f_{91}(f_{91}(100-(n-10))$$

Comme $n-10 \in [\![0,n]\!]$, avec l'hypothèse de

$$f_{91}(100-(n-10)) = 91.$$

D'où $f_{91}(100-(n+1)) = f_{9}1(91) = 91$.

Par récurrence forte : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : f_{91}(100-n) = 91}$

EXERCICE 5 (*Fonction d'Ackermann*)

1. (a) $\boxed{A(0,0) = 1}$

   (b) On a par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(1,p) = p+2$. A partir de là,

$$\begin{aligned} A(2,2) &= A(1,A(2,1)) = A(2,1)+2 = A(1,A(2,0))+2 \\ &= A(2,0)+4 = A(1,1)+4 = 3+4 = 7. \end{aligned}$$

donc $\boxed{A(2,2) = 7}$

En détaillant :

- $A(1,0) = A(0,1) = 2$
- $A(1,1) = A(0,A(1,0)) = A(0,2) = 3$
- $A(1,2) = A(0,A(1,1)) = A(0,3) = 4$
- $A(1,3) = A(0,A(1,2)) = A(0,4) = 5$
- $A(1,4) = A(0,A(1,3)) = A(0,5) = 6$
- $A(1,5) = A(0,A(1,4)) = A(0,6) = 7$
- $A(2,0) = A(1,1) = 3$
- $A(2,1) = A(1,A(2,0)) = A(1,A(1,1)) = A(1,3) = 5$
- $A(2,2) = A(1,A(2,1)) = A(1,5) = 7$

2.

OCaml

```ocaml
let rec ackermann n p =
  if n = 0 then
           p + 1
  else if p = 0 then
    ackermann (n - 1) 1
  else
    ackermann (n - 1) (ackermann n (p - 1))
;;
```

ou

OCaml

```ocaml
let rec ackermann n p =
  match n, p with
  | 0, _ -> p + 1
  | _, 0 -> ackermann (n - 1) 1
  | _ -> ackermann (n - 1) (ackermann n (p - 1)) ;;
```

3. Pour utiliser l'indication donnée, remarquons que l'appel à $A(n,p)$ donne directement le résultat pour $n = 0$ et provoque un appel à $A(n-1,1)$ ou des appels à $A(n,p-1) = k$ et à $A(n-1,k)$.
Dans tous les cas, on appelle la fonction sur des couples strictement inférieur pour l'ordre lexicographique défini par

$$(a,b) \trianglelefteq (c,d) \iff a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leqslant d).$$

En effet, si $n \geqslant 1$, $(n-1,1) \vartriangleleft (n,p)$, $(n,p-1) \vartriangleleft (n,p)$ et pour tout k, $(n-1,k) \vartriangleleft (n,p)$.
Ainsi, les chaînes d'appels récursifs se font sur des suites de couples d'entiers naturels strictement décroissantes pour cet ordre. (En fait, les appels récursifs se dessinent sur un arbre et ces chaînes correspondent aux branches de l'arbre).

Or si $((a_n,b_n))_n \in \left(\mathbb{N}^2\right)^{\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante pour l'ordre lexicographique, pour tout n, $a_{n+1} < a_n$ ou $(a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n)$. Donc (a_n) est décroissante et positive donc convergente et entière donc stationnaire. Mais alors à partir d'un certain rang, (b_n) décroît donc stationne comme précédemment. Finalement, $((a_n,b_n))$ stationne et cela contredit la stricte monotonie.
Finalement, toutes les chaînes d'appels récursifs sont bien finies et la fonction termine.

Voici une autre justification, par récurrence. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P_n : \text{« } \forall\, p \in \mathbb{N},\ \ A(n,p) \text{ termine et } A(n,p) \in \mathbb{N}. \text{ »}}$$

- On a P_0 car $\forall p \in \mathbb{N} : A(0,p) = p+1 \in \mathbb{N}$
- Supposons P_n pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
- Pour montrer P_{n+1}, on montre, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ l'assertion

$$\boxed{S_p : \text{« } A(n+1,p) \text{ termine et } A(n+1,p) \in \mathbb{N}. \text{ »}}$$

  - ◇ $A(n+1,0) = A(n,1)$.
    Avec P_n, $A(n+1,0) = A(n,1)$ termine et $A(n+1,0) = A(n,1) \in \mathbb{N}$.
    D'où S_0.
  - ◇ Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, supposons S_p ie $A(n+1,p)$ termine et $A(n+1,p) \in \mathbb{N}$.
    On a $A(n+1,p+1) = A(n,A(n+1,p))$.
    Avec S_p, $A(n+1,p)$ termine et $A(n+1,p) \in \mathbb{N}$.
    Puis avec P_n, $A(n,A(n+1,p))$ termine et $A(n,A(n+1,p)) \in \mathbb{N}$.

Ainsi $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, p \in \mathbb{N},\ \ A(n,p) \text{ termine et } A(n,p) \in \mathbb{N}.}$