TD n° 3 bis : Récursivité – complément

On souhaite calculer $\binom{n}{k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une fonction récursive.

1. Écrire une fonction récursive `binom : int -> int -> int` répondant à la question en utilisant la formule du triangle de Pascal.
2. Justifier la terminaison et la correction de la fonction.
3. À l'aide d'un arbre, détailler les appels récursifs nécessaires au calcul de $\binom{4}{2}$.
4. On note N_k^n le nombre d'appels récursifs nécessaires au calcul de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
   Déterminer, pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence reliant N_k^n, N_{k-1}^{n-1}, N_k^{n-1} et préciser la valeur de N_0^n et N_n^n.
5. La relation de récurrence précédente étant de la même forme que celle de $\binom{n}{k}$, on cherche a et b tels que $N_k^n = a\binom{n}{k} + b$. Trouver a et b.
6. Pour un n donné, la valeur maximale de $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. On suppose n pair et on pose $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
   En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent de N_k^{2k}.
   Qu'en penser ?
7. Une meilleure idée est d'utiliser la formule $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
   Écrire une nouvelle fonction récursive `binom : int -> int -> int` utilisant cette propriété.
   Il y a un piège : essayer de l'implémenter réellement et corriger l'erreur.
   Justifier la terminaison et la correction et estimer le nombre d'appel récursifs.
8. Optimiser la fonction précédente en utilisant le fait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.