TD n° 3 : Récursivité

Exercice 1 *Nombre de chiffres d'un entier*

Écrire une fonction `nombre_chiffres : int -> int` qui donne le nombre de chiffres d'un entier naturel écrit en base 10.

Exercice 2 *Multiplication du paysan russe*

On multiplie deux entiers a et b de la manière suivante : si a est pair on divise a par 2 et on double b, sinon on décrémente a et on ajoute b au résultat (qui vaut 0 au départ). Implémenter cet algorithme en CAML, montrer qu'il termine et qu'il renvoie le résultat escompté.

Exercice 3

Que font les fonctions f et g ?

1.

OCAML
```
let rec f n = (n = 0) || g (n - 1)
and g n = (n <> 0) && f (n - 1);;
```

2.

OCAML
```
let rec f n = if n = 0 then 1 else 3 + g (n - 1)
and g n = if n = 0 then 0 else 1 + f (n - 1);;
```

3. (à implémenter en CAML)

$$f : (m,n) \to \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ g(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g : (m,n) \to \begin{cases} n & \text{si } m = 0 \\ f(m-1, n) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 4 *Fonction 91 de McCarthy*

Déterminer ce que calcule la fonction suivante et le démontrer :

OCAML
```
let rec f_91 n =
  if n > 100 then
    n - 10
  else
    f_91 (f_91 (n + 11))
```

Remarquons qu'il n'était pas évident *a priori* qu'une telle fonction renvoie bien un résultat.

Exercice 5 *Fonction d'Ackermann*

La fonction d'Ackermann est définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} A(0,p) = p+1 & \text{pour } p \geq 0 \\ A(n,0) = A(n-1,1) & \text{pour } n \geq 1 \\ A(n,p) = A(n-1, A(n,p-1)) & \text{si } n \geq 1, p \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $A(0,0)$ puis $A(2,2)$.
2. Implémenter la fonction d'Ackermann en CAML.
3. Démontrer la terminaison de cette fonction pour tout couple d'arguments entiers naturels. *Indication : utiliser l'ordre lexicographique et montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante pour l'ordre lexicographique de couples d'entiers naturels.*

☞ **Remarque 1**

La fonction d'Ackermann croît très rapidement, en particulier $n \mapsto A(n,n)$ croît plus rapidement que n'importe quelle fonction polynôme, exponentielle ou même très certainement n'importe quelle autre fonction que vous êtes capables d'écrire (ou même d'imaginer). Par exemple, $A(4,2)$ a déjà 19729 chiffres et représente bien plus que le nombre estimé d'atomes dans l'univers.